Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas I. CI-2525

Práctica 8

1.- Determine si existe dominación asintótica, del tipo O grande u Ω entre las funciones que se indican a continuación:

i. $f_1: N \to R, f_1(n) = n^2$

ii. $f_2: N \to R, f_2(n) = n^2 + 1000n$

iii. $f_3: N \to R, f_3(n) = \begin{cases} n \; si \; n \; es \; par \\ n^3 \; si \; n \; es \; impar \end{cases}$

iv. $f_4: N \to R, f_4(n) = \begin{cases} n \; si \; n \; < 100 \\ n^3 si \; n \; \geq 100 \end{cases}$

v. $f_5 : N \to R, f_5(n) = \ln(n^{\ln(2n)})$

2.- Suponga $f: N \to R, f \; es \; O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$. Suponga que definimos $g: N \to R \; por,$

$$g(n) = \begin{cases} f(n) + f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{2^2}\right) + \cdots + f(1) \; si \; n \; es \; potencia \; de \; 2 \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

Demuestre que g es O $\left(n^{\frac{1}{2}} \ln(n)\right)$

3.-Suponga que $f: N \to R^{\geq 0}, g: N \to R^{\geq 0}, h: N \to R^{\geq 0}, w: N \to R^{\geq 0}$ donde f es O(g) y h es O(w). Demuestre que,

a. $f + h \; es \; O(g + w)$
b. $f.h \; es \; O(g.w)$

4.-Suponga que f es O($n^{\frac{-1}{3}}$). Determine $\lim_{n\to\infty} f(n)$

6.- Sean $f: N \to R^{\geq 0}, g: N \to R^{\geq 0}$. Justifique que,

Para cada $t: N \to R^{\geq 0}$, $t \; es \; O(f + g) \; si \; y \; solo \; si \; t \; es \; O(\max\{f, g\})$

7.-Sean $f: N \to R \; y \; g: N \to R$ tal que $f \; es \; O\left(\frac{1}{n}\right)$. Suponiendo que a es positivo demuestre que,

a. $\frac{f(n)}{1+\frac{a}{\sqrt{n}}} es \; O(\frac{1}{n})$
b. $(1 + \frac{a}{\sqrt{n}})f(n) \; es \; O(\frac{1}{n})$
c. $1 + \frac{a}{\sqrt{n}} + f(n) \; es \; O(\; (1 + \frac{a}{\sqrt{n}})(1 + O(\frac{1}{n}) \;)$

8.- Suponga que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ y converge para $|x| \leq r$ donde r es fijo y positivo. Demuestre que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$.

9.- Demuestre que $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + O(\frac{\ln(n)^2}{n^2})$. Utilice el resultado del problema 8.

10) Utilice la definición de Θ para demostrar que $3n^2 + 180n = \Theta(n^2)$

11) Sean f y g dos funciones de los naturales en los reales no negativos. Mostrar que:

$$\max(f(n),g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

12) Muestre que $(n+a)^b = \Theta(n^b)$, donde a y b son números reales y b > 0

13) Halle una aproximación asintótica con error absoluto $O(n^{-2})$ de la expresión:

$$\left(3n^2 - n^{-1} + O(n^{-4})\right)\left(10n^2 + \ln(n) + O(n^{-5})\right), donde\ O(\,)\ es\ O\ grande$$

14) Sea $T(n)$ dado por la siguiente recurrencia:

$$T(n) = 2.T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2.T(\lceil n/2 \rceil) + n^2 \qquad para\ n \geq 2\ \ y\ \ T(1) = 0$$

a) Demuestre que $T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n \,/\, n \text{ es potencia de } 2)$,

b) ¿Qué habría que demostrar para poder concluir que $T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n)$? Utilice el Teorema de suave crecimiento o regla de la uniformidad

c) Utilice el Teorema Maestro para concluir que $T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n)$

Ayuda:

- $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{n} x^n$
- $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera por debajo del número real *x*, es decir, el mayor entero menor o igual a x , y $\lceil x \rceil$ es la parte entera por arriba del número real *x*, es decir, el menor entero mayor o igual a x